Proceedings of IAM, V.3, N.1, 2014, pp.105-111

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА*

А.П. Гулиев [1], Р.М.Тагиев[1], К.Г. Касымова[2]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2]Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
e-mail: tagiyev_resad@hotmail.com

Резюме. В настоящей работе рассматриваются краевая задача для двухмерной системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа возникающих при решении общей пространственной задачи газлифта. Сначала при заданных граничных функций с помощью метода степенных рядов вычисляются соответствующие начальные функции и в далее дискретизируя заданную системы гиперболических уравнений в разностной равномерной сетке в области $D = \{0 \le x \le 2l, \quad 0 \le t \le T\}$, численно решается соответствующая начально-краевая задача. На конкретном примере оценивается точность полученных числовых результатов. Показывается, что решение соответствующих начально-краевых задач определят движение в пространственного газлифтного процесса (изменение объема газожидкостной смеси (ГЖС) и их давление в каждой точки подъемники). Вычислительные эксперименты подтверждает адекватности построенной математической модели с практикой.

Ключевые слова: Гиперболическое уравнение**,** краевая задача, метод рядов, газлифт.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

При моделировании газлифтного процесса [1,2] обычно исследователи разными методами ведут исследование, считая, что движения ГЖС описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Как показано в [3] движение описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных. Предложенные математические модели [3] являются приближенными. Поэтому в [4] авторы исходные модели исследуют для решений соответствующих краевых задач [3,4], самостоятельно задают как краевые, так и начальные условия. Однако, при заданных краевых условиях можно вычислить начальные условия и потом можно решать соответствующие начально-краевые задачи.

---

* Работа поддержана совместным грантом НАНА и ГНКАР № 17, 2013-2015 г
Reported at the seminar of the Institute of Applied Mathematics in 27.05.2014

2. Постановка задачи

Как известно [4], движение в кольцевом (затрубном) пространстве и подъемнике описывается соответственно системой линейных дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа

$$-F_\eta \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + 2a_\eta Q,$$
$$-F_\eta \frac{\partial P}{\partial t} = c_\eta^2 \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \eta = 1,2, \qquad (1)$$

где $P(x,t)$-давление, $Q(x,t)$-объем газа и газожидкостной смеси в соответствующих трубах, $2a_\eta = \frac{g}{\omega_0} + \frac{\lambda \omega_\eta}{2D_\eta}$, $(\eta = 1,2)$, ω_0- средняя скорость потока по длине трубопровода, λ - коэффициент гидравлических сопротивлений, D_η $(\eta = 1,2)$-эффективные диаметры в кольцевом пространстве и подъемнике соответственно, ω_η усредненная по поперечному сечению скорость движения смеси, $F_\eta (\eta = 1,2)$ площади поперечного сечения насосно-компрессорных труб и подъемника и являются постоянными по оси x, c_η -скорость звука в газе и ГЖС соответственно, g -ускорение силы тяжести.

Отсюда при значении $t = 0$, получаются начальные условия [5], для которого выбрано $n+1$ слагаемое

$$P(x,0) \approx \sum_{k=0}^{n} P_k(0) \frac{x^k}{k!}$$
$$Q(x,0) \approx \sum_{k=0}^{n} Q_k(0) \frac{x^k}{k!} \qquad (2)$$

$0 \le x \le l.$

Отметим, что начальные и краевые условия для уравнений (1) можно задать в следующем виде [4]

$$P(x,0) = P(x), \quad Q(x,0) = Q(x), \qquad P(0,t) = P_0(t), \quad Q(0,t) = Q_0(t),$$
$$0 \le x \le 2l, \ t \in (0,T),$$

где $Q_0(t)$, $P_0(t)$ заданные непрерывные функции.

Эти задачи (1)-(2) исследованы с помощью разностных схем в [6]. Далее, оставляя в (2) только граничные условия, примем схемы работы [5]

$$P(x,t) \approx \sum_{k=0}^{n} P_k(t)\frac{x^k}{k!},$$
$$Q(x,t) \approx \sum_{k=0}^{n} Q_k(t)\frac{x^k}{k!}. \tag{3}$$

Поэтому, предполагая, что решения $P(x,t)$, $Q(x,t)$ из (1) определены в области $D = \{0 \le x \le 2l,\ 0 \le t \le T\}$, разбиваем их в разностной равномерной сетке соответственно по x и по t в следующем виде

$$W_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,\dots,n,\ hn = 2l\},$$

и

$$W_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0,1,\dots,k,\ k\tau = T\},$$

где h и τ шаги разделения соответствующих интервалов по высоте скважины x и по времени t. Теперь аппроксимируем уравнения (1) в точке (x_i, t_j), где производные $\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ определяются в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} \approx \frac{P_{ij} - P_{ij-1}}{\tau},\quad \frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{Q_{ij} - Q_{ij-1}}{\tau},$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{P_{ij} - P_{i-1,j}}{h},\quad \frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{Q_{ij} - Q_{i-1,j}}{h}. \tag{4}$$

Здесь $i = 0,1,\dots,n;\ j = 0,1,\dots,k$.

Подставив (4) в (1), после соответствующих преобразований имеем следующие разностные уравнения для определения объема газа Q_{ij} и давлений P_{ij} в следующем виде

$$P_{i+1,j} = P_{ij} - \frac{h}{F_1\tau}\left(Q_{ij} - Q_{ij-1}\right) - 2a_1hQ_{ij},$$
$$Q_{i+1,j} = Q_{ij} - \frac{F_1h}{C_1^2\tau}\left(P_{ij} - P_{ij-1}\right), \tag{5}$$
$$i = 1,2,\dots,n-1,\quad j = 2,3,\dots,k,$$

$$P_{0,j} = P(0,t_j) = \beta_1 \cdot e^{\alpha_1 t_j},$$
$$Q_{0,j} = Q(0,t_j) = \beta_2 \cdot e^{\alpha_2 t_j}, \tag{6}$$

$$P(x_i,0) = P_0(0) + P_1(0)\cdot\frac{x_i}{1!} + P_2(0)\cdot\frac{x_i^2}{2!} + P_3(0)\cdot\frac{x_i^3}{3!}\dots\dots P_n(0)\frac{x_i^n}{n!},$$
$$Q(x_i,0) = Q_0(0) + Q_1(0)\cdot\frac{x_i}{1!} + Q_2(0)\cdot\frac{x_i^2}{2!} + Q_3(0)\cdot\frac{x_i^3}{3!}\dots\dots Q_n(0)\frac{x_i^n}{n!}, \tag{7}$$

Теперь, переходя из кольцевого пространства подъемника,

$$P(x_i, t_j) \approx \sum_{k=0}^{n} P_k(t_j)\frac{x_i^k}{k!},$$
$$Q(x_i, t_j) \approx \sum_{k=0}^{n} Q_k(t_j)\frac{x_i^k}{k!}. \qquad (8)$$

Далее для начального этапа в подъемнике создадим следующие граничные условия

$$P_{n+1,j} = P(n+1, t_j) = f_\delta^1 P\left(n, t_j\right) + \delta_1^1 P^2\left(n, t_j\right) + \delta_3^1,$$
$$Q_{n+1,j} = Q(n+1, t_j) = f_\delta^2 Q\left(n, t_j\right) + \delta_1^2 Q^2\left(n, t_j\right) + \delta_3^2. \qquad (9)$$

Тогда, аналогично предыдущему, рассматривается дискретное уравнение (подобно п.2) с граничными и начальными условиями, т.е., система:

$$P_{i+1,j} = P_{ij} - \frac{h}{F_2\tau}\left(Q_{ij} - Q_{ij-1}\right) - 2a_2 h Q_{ij},$$
$$Q_{i+1,j} = Q_{ij} - \frac{F_2 h}{c_2^2\tau}\left(P_{ij} - P_{ij-1}\right) \qquad (10)$$

с начальными условиями первого этапа:

$$P_{i,0} = P\left(x_i, 0\right) = P_0(0) + P_1(0)\frac{x_i}{1!} + P_2(0)\frac{x_i^2}{2!} + P_3(0)\frac{x_i^3}{3!} + \ldots.. + P_n(0)\frac{x_i^n}{n!},$$
$$Q_{i,0} = Q(x_i, 0) = Q_0(0) + Q_1(0)\frac{x_i}{1!} + Q_2(0)\frac{x_i^2}{2!} + Q_3(0)\frac{x_i^3}{3!} + \ldots.. + Q_n(0)\frac{x_i^n}{n!}, \qquad (11)$$
$$0 \le x \le l, \quad h = \frac{2l}{n}.$$

Начальные условии 2-го этапа определим исходя из решения задач этого этапа в виде,

$$\overline{P}_{i,0} = \overline{P}\left(x_i, 0\right) = \overline{P}_0(0) + \overline{P}_1(0)\frac{x_i}{1!} + \overline{P}_2(0)\frac{x_i^2}{2!} + \overline{P}_3(0)\frac{x_i^3}{3!} + \ldots. + \overline{P}_n(0)\frac{x_i^n}{n!},$$
$$\overline{Q}_{i,0} = \overline{Q}(x_i, 0) = \overline{Q}_0(0) + \overline{Q}_1(0)\frac{x_i}{1!} + \overline{Q}_2(0)\frac{x_i^2}{2!} + \overline{Q}_3(0)\frac{x_i^3}{3!} + \ldots. + \overline{Q}_n(0)\frac{x_i^n}{n!}, \qquad (12)$$
$$l \le x \le 2l.$$

Повторяя эти итеративные схемы, находим дискретное решение этого случая.

Алгоритм.

1.Выбрав шаги $h = \frac{2l}{n}$, $\tau = \frac{T}{k}$ по x и t соответственно, строим сетку

$$x_i = x_0 + ih, t_i = t_0 + \tau j,$$
$$i = 0,1,\ldots,2n,\ j = 0,\ldots,k,$$

n и k -заданное число шагов.

2. Граничные условия задаются формулой (6).

$P(0, j) = P_{0,j}$, $Q(0, j) = Q_{0,j}$ $j = 1,..,k$, где $P(0, j), Q(0, j)$ заданные числа, характеризующие давление и объем газа, соответственно, и начальные условия будут в виде. Начальные условия из (7) виде:

$$P_{i,0} = P(x),\ Q_{i,0} = Q(x),\ \ i = 1,...,2n\ .$$

3. По явным схемам (10) вычисляются $P_{i+1,j}, Q_{i+1,j}; i = 1,...,n-1,\ j = 1,...,k$.

5. По формуле (9) вычисляются $P_{n+1,j}$ и $Q_{n+1,j}$, $j = 2,...,k$

6. По формуле (8) вычисляются аналогично 2-го часто $P_{i,j}$ и $Q_{i,j}$ при $i = n+1,...,2n,\ j = 2,...,k$,

7. При i=2n получаем дебит $Q(2l, t_j)$, $j = 1,...k$.

Теперь переходим к численной реализации предложенного алгоритма. Для этого рассмотрим конкретный практический случай [4], т.е. примем параметры в следующем виде:

$l = 1485m$, $c = 331m/c$, $\rho = 0.717kq/m^3$ $d = \sqrt{114^2 - 73^2} \cdot 10^{-3}$ м ,

$\lambda = 0.01$ при $0 \le x \le l$; c=850 m/c , $\rho = 700kq/m^3$, $d = 0.073m$,

$\lambda = 0.23$ при $l \le x \le 2l$.

Задается малое число ε и полученные значения $P(i, j),\ Q(i, j)$ поставляются в значения нормы соответствующей невязки. Если она меньше заданного ε , то вычислительный процесс останавливается, иначе шаг интегрирования h и τ выбираются соответствующим образом и переходится к шагу 1.

Тогда для $P(i, j)$ имеем следующий график, отображенный на Рис.1.

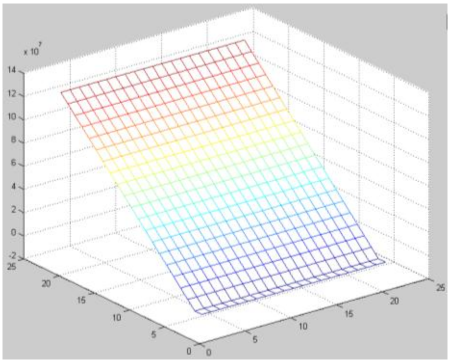

Рис. 1. Давление. $P(l \le x \le 2l,\ \tau \le t \le T)$

Далее приведем график объемного расхода ГЖС- $Q(i, j)$ в следующем рисунке (рис.2)

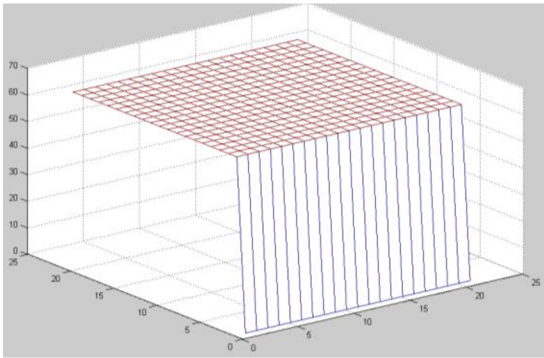

Рис. 2. Дебит. $Q(l \le x \le 2l, \tau \le t \le T)$

Из обоих графиков (рис. 1 и рис. 2) видно, что $P(i, j)$ и $Q(i, j)$ уменьшаются, что подтверждает адекватность полученных результатов с практическими данными измерений дебита.

Литература

1. Eikrem G.O., Aamo O.N., Foss B.A., Stabilization of gas-distribution instability in single-point dual gas lift wells, SPE Production and Operations, Vol.21, No.2, 2006, pp.1-20.
2. Imsland L.S., Eikrem G.O., Foss B.A., A state feedback controller for the class of nonlinear positive systems applied to stabilization of gas-lifted oil wills, Control Engineering Practice, N.3, 2006, pp.7-15.
3. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А.. Моделирование работы газлифтной скважины, Доклады НАН Азербайджана, №2, 2008, с.107-115.
4. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Задачи моделирования оптимальной стабилизации газлифтного процесса, Прикладная механика, т. 46, №6, 2010, с.113-122.
5. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Гулиев А. П., Ильясов М.Х.. Метод рядов в решении одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, возникающих при добыче нефти. PROCEEDINGS of the Institute of Applied Mathematics, Vol.2, No.2, 2013, с.113-136.
6. Гулиев А. П., Ильясов М.Х., Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Алгоритм решения задачи определения движения пространственного газлифтного процесса., Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.2, No.1, 2013, с.91-97.

Qazlift prosesində hiperbolik tip sərhəd məsələsinin həlli üçün hesablama alqoritmi

A.P. Quliev, R.M. Tağıyev, K.Q. Qasımova

XÜLASƏ

Bu işdə qazliftin ümümi fəza məsələlərinin həllində yaranan iki ölçülü xətti sistemin xüsusi törəməli hiperbolik tip sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Əvvəlcə, qüvvət sırası metodunun köməyi ilə sərhəd funksiyası verildikdə başlanğıc funksiya hesablanır. Sonra $D=\{0\le x\le 2l, \quad 0\le t\le T\}$oblastında fərqlərlə verilmiş hiperbolik tənliklər sistemi diskretləşdirilir və başlanğıc-sərhəd məsələsi ədədi həll olunur. Alınmış ədədi nəticələrin dəqiqliyi konkret misalla qiymətləndirilir. Hesablanma eksperimenti qurulmuş riyazi modelin praktika ilə adekvatlığını təsdiq edir.

Açar sözlər: Hiperbolik tənliklər, sərhəd problemi, sıra metodu, qazlift.

Computational algorithm to solution of boundary problem of the system of hyperbolic type in gaslift process

A.P. Guliev, R.M. Tagiyev, K.G. Gasimova

ABSTRACT

In this paper is considered the boundary problem for two-dimensional system of linear partial differential equations of hyperbolic type, arising in solving the general problem of spatial gas lift. First, for given boundary functions using the method of power series are calculated the corresponding initial functions and further by discretizing the given system of hyperbolic equations in the difference uniform grid in the interval $D=\{0\le x\le 2l, \quad 0\le t\le T\}$, the corresponding initial-boundary value problem is solved numerically. On a concrete example is estimated the accuracy of the numerical results. It is shown that the solution of the corresponding initial-boundary value problems determine the motion in the spatial gas lift process (change of the gas-liquid mixture (GLM) volume and their pressure at the each point of lift). Computational experiments confirm the adequacy of the constructed mathematical models and practice.

Keywords: hyperbolic equation, boundary value problem, the method of series, gaslift.